$\exists x, y \in \mathbb{R}$ tq $x \neq y$ et $f(x) = f(y)$

Posons $x = 1$, $y = -1$. Alors, $x \neq y$ et $f(x) = x^2 = 1^2 = 1$ tandis que $f(y) = y^2 = (-1)^2 = 1$, d'où $f(x) = f(y)$, qui est le résultat voulu.

(iv) Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par $f(x) = x^2$. Alors, f n'est ni surjective ni injective

↳ idem (ii)

idem (iii)

Morale de l'histoire : dire que x^2 est injective / surjective n'a pas de sens, ça dépend du domaine et codomaine.

Définition 0.34 : Composition de fonctions.

Soient $f : X \to Y$, $g : Y \to Z$, deux fonctions. La composition de f et g notée $g \circ f$ est la fonction

$g \circ f : X \to Z$ définie par

$g \circ f(x) = g(f(x))$

Définition 0.35 : fonction réciproque inversible.

Soit $f : X \to Y$ une fonction. On dit que f est inversible si $\exists\, g : Y \to X$ tq $\forall y \in Y$, $f \circ g(y) = y$ et $\forall x \in X$, $g \circ f(x) = x$. On appelle alors g la fonction réciproque de f qu'on note f^{-1}

Théorème 0.36

Une fonction est bijective si et seulement si elle est inversible.

Exemple 0.37.

(i) Soit $f : \mathbb{R}_+ \longrightarrow \mathbb{R}_+$ définie par $f(x) = x^2$.

On a vu à l'exemple 0.33 (i) que f est bijective, elle est donc inversible. Si $f^{-1} : \mathbb{R}_+ \longrightarrow \mathbb{R}_+$ est définie par $f^{-1}(x) = \sqrt{x}$, alors, $\forall x \in \mathbb{R}_+$, $f^{-1} \circ f(x)$

$$= f^{-1}(f(x)) = \sqrt{x^2} = |x| \overset{x \geq 0}{=} x$$ et

$$f \circ f^{-1}(x) = f(f^{-1}(x)) = (\sqrt{x})^2$$

$$= x.$$

Remarque 0.38 :

Pour trouver f^{-1} on pose $y = f(x)$ qu'on résout pour x. L'identité avec laquelle on termine est $f^{-1}(y) = x$.

Recherche de preuve injectif, surjectif

Analyser $y = f(x)$

$f^{-1}(y) = x$ donne le x à poser pour la démo de surjectivité

si plusieurs x possibles $\rightarrow$ pas injectif.

Remarque 0.38 :

Pour trouver f^{-1} on pose $y = f(x)$ qu'on résout pour x. l'identité avec laquelle on termine est $f^{-1}(y) = x$.

$y = f(x)$ & injectivité ou surjectivité

- la solution nous donne le x à poser dans la surjectivité

$$y = x^2 \overset{x \geq 0}{\Rightarrow} x = \sqrt{y}$$

- la solution est unique $\Rightarrow$ f est injective

- On trouve plusieurs solutions, $\Rightarrow$ f n'est pas injective

$$y = x^2 \Rightarrow \sqrt{y} = |x| \Rightarrow x = \pm\sqrt{y}$$

- trouver une solution demande des hypothèses supplémentaires sur y. $\Rightarrow$ pas surjectif

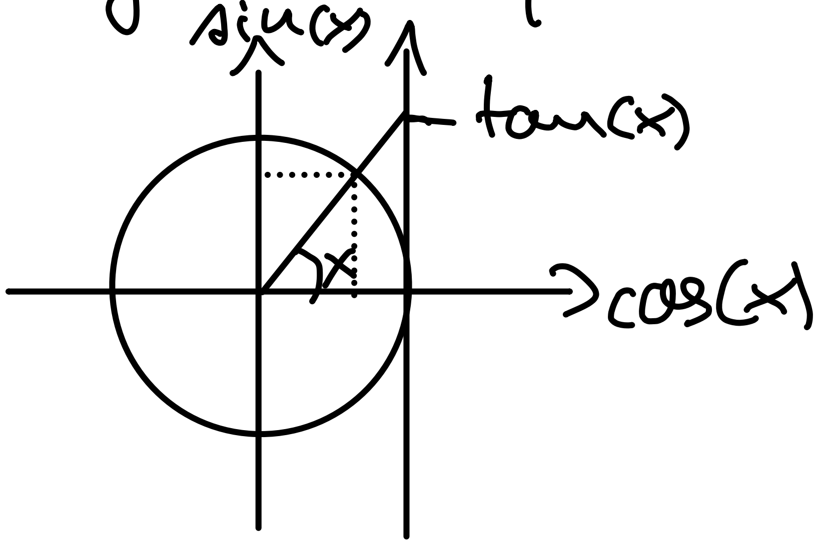
$$\boxed{y \geq 0}$$

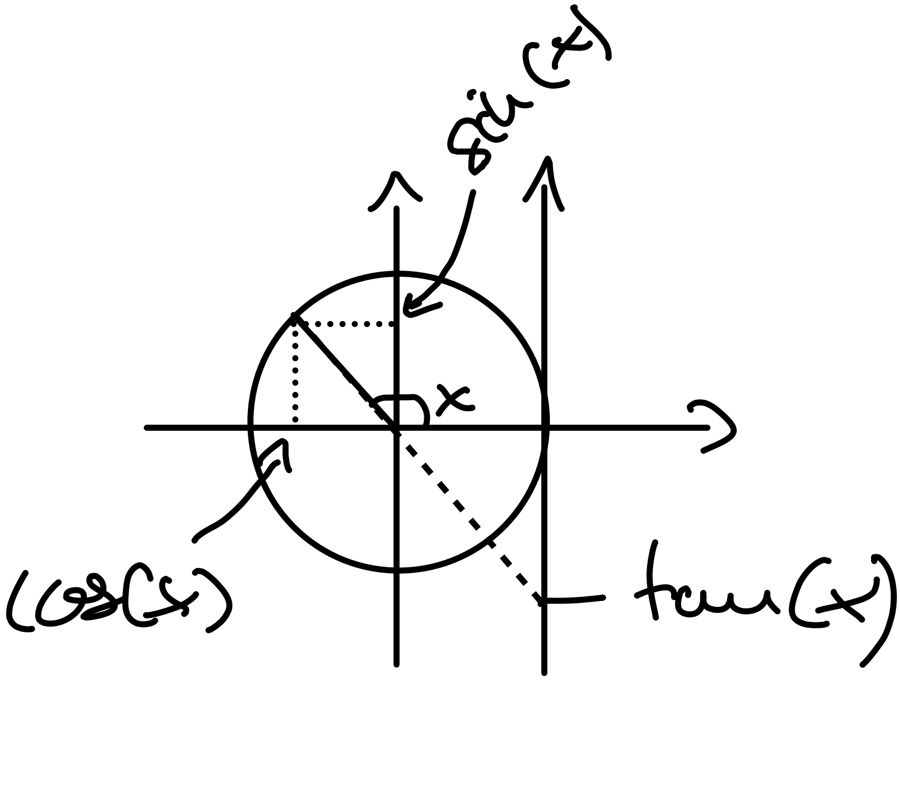
$$y = x^2 \longrightarrow \sqrt{y} = |x|.$$

§0.5 Les fonctions trigonométriques, l'exponentielle et le logarithme

Définition 0.49 Fonctions trigonométriques.

On peut définir $\sin(x)$, $\cos(x)$ & $\tan(x)$ à l'aide du cercle trigonométrique.





Proposition 0.51

On a

$\forall x \in \mathbb{R}, \quad |\sin(x)| \leq |x|$

$\forall x \in \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[\setminus \{0\}, \quad \cos(x) \leq \frac{\sin(x)}{x} \leq 1$

À montrer $A = B$

$\Leftrightarrow \quad A \subseteq B$ & $B \subseteq A$.

$A = \{x : P(x) \text{ est vraie}\}$

$B = \{x : Q(x) \text{ est vraie}\}$

Montrer que $A \subseteq B$

$\Leftrightarrow$ montrer que $\forall x \in A, \ x \in B$.

Soit $x \in A$ qcq. Donc $\boxed{P(x)}$ est vraie. déductions, $Q(x)$ est vraie également, donc $x \in B$.

Infos :

◇ Vidéo cours mercredi - des problèmes techniques subsistent?

◇ Début du support sur le forum (tous les mardi après-midi)

Définition 0.52 : Exponentielle et logarithme.

On définit l'exponentielle $\exp : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}_+^*$, $\exp(x) = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{x^k}{k!}$

ou $\exp(x) = \lim_{n \to \infty} \left(1 + \frac{x}{n}\right)^n$

On écrit également $e^x = \exp(x)$ car si $e = \lim_{n \to \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{k!}$ est la constante d'Euler ($e \approx 2,7\ldots$) et $n \in \mathbb{Z}$, alors,

$e^n = \exp(n)$

L'exponentielle est inversible et on définit le logarithme comme son inverse : $\log : \mathbb{R}_+^* \rightarrow \mathbb{R}$ tq $\forall x \in \mathbb{R}_+^*$ $e^{\log(x)} = x$ et $\forall x \in \mathbb{R}$, $\log(e^x) = x$.

Remarque 0.53

(i) On peut se servir des propriétés de l'exponentielle pour définir a^b où $a \in \mathbb{R}_+^*$, $b \in \mathbb{R}$.

$$a^b = e^{b \cdot \log(a)}$$

(ii) Des fois, la notation log est réservée pour le logarithme en base 10.

Dans ce cours, toutes les notations log, Log, ln, Ln font toujours référence au logarithme en base e.

§0.6 Techniques de démonstration

Théorème 0.58 : Démonstration par récurrence.

Soit $n_0 \in \mathbb{N}$ et $P(n)$ un énoncé / une propriété qui peut être

Soit vrai soit fausse et tq

(i) $P(n_0)$ est vraie (Ancrage/ Initialisation)

(ii) $\forall n \geq n_0$, $P(n) \Rightarrow P(n+1)$ (Pas de récurrence/Pas d'induction/ hérédité)

Alors, $\forall n \geq n_0$, $P(n)$ est vraie.

<u>Exemples 0.59</u>

(ii) Montrons par récurrence que $\forall n \in \mathbb{N}$, $\sum_{k=1}^{n+1} k^3 = \frac{1}{4}(n+1)^2 \cdot (n+2)^2$

<u>Questions</u>: Qui est n_0? qui est $P(n)$?

$P(n) =$ " $\sum_{k=1}^{n+1} k^3 = \frac{1}{4}(n+1)^2 (n+2)^2$ "

n_0 est le plus petit n dans l'énoncé

$n_0 = 0$

$P(n_0) = ?$ $P(n+1)$?

$P(n) =$ " $\sum_{k=1}^{n+1} k^3 = \frac{1}{4}(n+1)^2(n+2)^2$ " ← Faire preuve de la même intelligence qu'un scanner

$P(0) =$ " $\sum_{k=1}^{0+1} k^3 = \frac{1}{4}(0+1)^2(0+2)^2$ "

$P(n+1) =$ " $\sum_{k=1}^{(n+1)+1} k^3 = \frac{1}{4}\left((n+1)+1\right)^2\left((n+1)+2\right)^2$ "

Ancrage : à montrer : " $\sum_{k=1}^{0+1} k^3 = \frac{1}{4}(0+1)^2(0+2)^2$ "

Le membre de gauche est $\sum_{k=1}^{1} k^3 = 1^3 = 1$. Le membre de droite est $\frac{1}{4}(1)^2 \cdot (2^2) = 1$.

On obtient la même chose, l'ancrage est démontré.

Pas de récurrence : On suppose que $\sum_{k=1}^{n+1} k^3 = \frac{1}{4}(n+1)^2(n+2)^2$ (H.R.)

et on montre $\sum_{k=1}^{n+2} k^3 = \frac{1}{4}(n+2)^2(n+3)^2$

$$\sum_{k=1}^{n+2} k^3 = \sum_{k=1}^{n+1} k^3 + \sum_{k=n+2}^{n+2} k^3 = \sum_{k=1}^{n+1} k^3 + (n+2)^3$$

$$\overset{H.R.}{=} \frac{1}{4}(n+1)^2(n+2)^2 + (n+2)^3$$

$$= (n+2)^2\left(\frac{1}{4}(n+1)^2 + n+2\right) = \frac{1}{4}(n+2)^2\left((n+1)^2 + 4n + 8\right)$$

$$= \frac{1}{4}(n+2)^2\left(n^2 + 6n + 9\right) = \frac{1}{4}(n+2)^2(n+3)^2$$

qui est le résultat voulu.

(i) Montrons que $\forall x \neq 1, \forall n \in \mathbb{N}, \sum_{k=0}^{n} x^k = \frac{1-x^{n+1}}{1-x}$

où par convention, $\forall x, x^0 = 1$.

$n_0 = ?$ $P(n) = ?$ $P(n_0) = ?$ $P(n+1) = ?$

$n_0 = 0$ " $\sum_{k=0}^{n} x^k = \frac{1-x^{n+1}}{1-x}$ "

$P(0) =$ " $\sum_{k=0}^{0} x^k = \frac{1-x^{0+1}}{1-x}$ "

$P(n+1) =$ " $\sum_{k=0}^{n+1} x^k = \frac{1-x^{(n+1)+1}}{1-x}$

Soit $x \neq 1$ quelconque.

Initialisation : À montrer : $\sum_{k=0}^{0} x^k = \frac{1-x^1}{1-x}$.

Le membre de gauche est

$\sum_{k=0}^{0} x^k = x^0 = 1$ et le membre de droite est $\frac{1-x}{1-x} = 1$.

Vu qu'on obtient la même chose, le résultat est vrai pour $n=0$.

Pas de récurrence : Supposons que $\sum_{k=0}^{n} x^k = \frac{1-x^{n+1}}{1-x}$ (H.R)

et montrons que $\sum_{k=0}^{n+1} x^k = \frac{1-x^{n+2}}{1-x}$.

On a

$$\sum_{k=0}^{n+1} x^k = \sum_{k=0}^{n} x^k + x^{n+1} \overset{H.R}{=} \frac{1-x^{n+1}}{1-x} + x^{n+1} = \frac{1-\cancel{x^{n+1}}+\cancel{x^{n+1}}-x^{n+2}}{1-x}$$

$$= \frac{1-x^{n+2}}{1-x}$$ qui est le résultat voulu.